

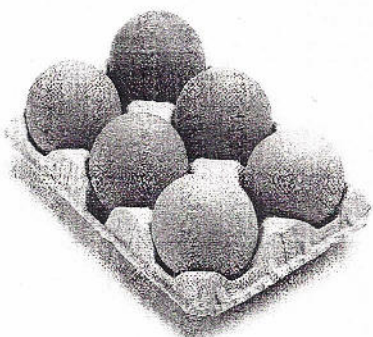
4 PROPORZIONI

■ **Parole chiave:** rapporto, uguaglianza, proporzione, medi, estremi, proprietà fondamentale, ricerca del termine incognito, proporzione continua



PROPORZIONI

Luca vuole preparare le tagliatelle fatte in casa. Nella ricetta della nonna c'è scritto che per 8 persone deve usare 6 uova. **Se Luca vuole fare le tagliatelle per 4 persone quante uova dovrà usare?**



6 sono le uova che servono per fare le tagliatelle per 8 persone.

E per 4 porzioni, quante uova serviranno?

E per 12 porzioni, quante uova serviranno?

Completa la seguente tabella:

Persone	8	4	12
Uova	6	3	9
Rapporto	$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$

Riduci la frazione!

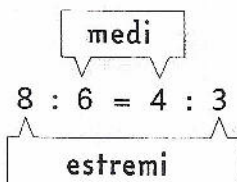
Ti sarai accorto che puoi proseguire inserendo altri dati in tabella. Quello che è certo è che il rapporto tra il numero delle persone e la quantità di uova rimane costante. Possiamo affermare quindi che:

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ oppure } 8 : 6 = 4 : 3$$

Abbiamo scritto un'uguaglianza di due rapporti che va letta così:

8 sta a 6 come 4 sta a 3

Una uguaglianza di due rapporti si chiama **proporzione**. I due termini centrali si chiamano **medi**, gli altri due si chiamano **estremi**.



Esercizi

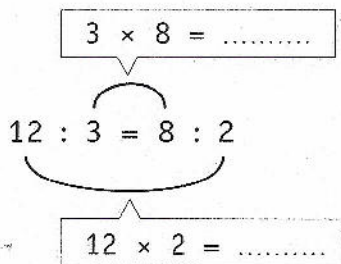
1 Completa la seguente tabella, seguendo l'esempio.

Proporzione	Medi	Estremi
$3 : 8 = 6 : 16$	8 e 6	3 e 16
$2 : 3 = 4 : 6$		
$5 : 15 = 10 : 30$		
$4 : 12 = 2 : 6$		
$20 : 4 = 30 : 6$		



LA PROPRIETÀ FONDAMENTALE

Esegui le operazioni indicate nello schema grafico qui sotto.



Completa:

- Nel riquadro in alto hai moltiplicato i
- Nel riquadro in basso hai moltiplicato gli
- Le due moltiplicazioni hanno lo stesso risultato?

» segue

Si tratta di un caso oppure è una regola sempre valida? Verificalo completando le proporzioni indicate nella tabella qui sotto.

Proporzione	Prodotto dei medi	Prodotto degli estremi
$3 : 2 = 15 : 10$	$2 \times 15 = 30$	$3 \times 10 = 30$
$2 : 3 = 6 : 9$ \times = \times =
$4 : 16 = 2 : 8$		
$14 : 7 = 6 : 3$		
$5 : 2 = 10 : 4$		
$20 : 2 = 30 : 3$		
$6 : 4 = 12 : 8$		



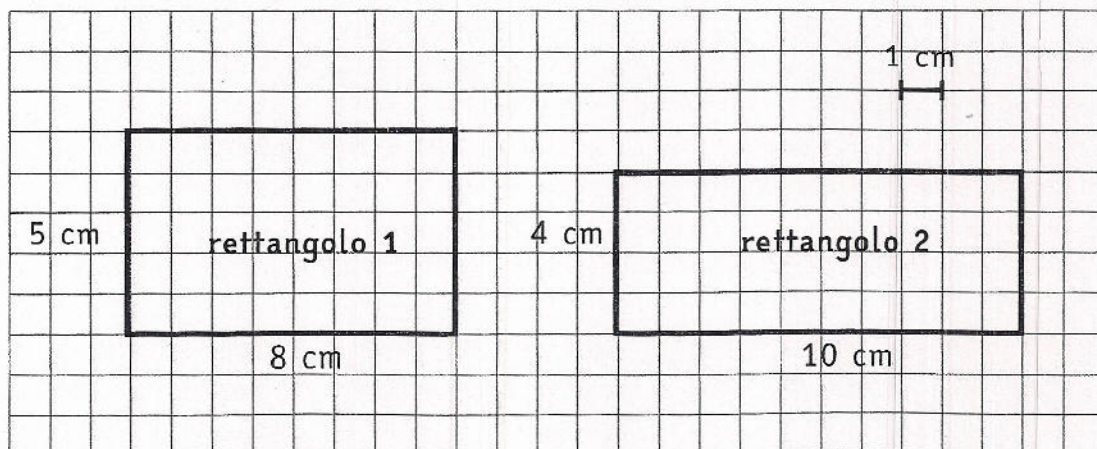
La proprietà fondamentale dice che in una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.



Esercizi

2 Possiamo verificare la proprietà fondamentale anche con l'aiuto della geometria.

Considera la proporzione $4 : 5 = 8 : 10$ e osserva le figure sotto.



» segue

Rettangolo 1

Base = 8 cm

Altezza = 5 cm

Area = $b \times h = \dots \times \dots = \dots \text{ cm}^2$

Base e altezza corrispondono ai medi della proporzione.

Rettangolo 2

Base = \dots cm

Altezza = \dots cm

Area = $b \times h = \dots \times \dots = \dots \text{ cm}^2$

Base e altezza corrispondono agli estremi della proporzione.

I due rettangoli hanno la stessa \dots

- 3** Disegna sul tuo quaderno (con unità di misura 1 cm) il rettangolo che ha per dimensioni i medi e il rettangolo che ha per dimensioni gli estremi di ciascuna delle due proporzioni scritte qui sotto.

• $3 : 2 = 6 : 4$

• $5 : 6 = 10 : 12$

Verifica che le coppie di rettangoli hanno la stessa area.

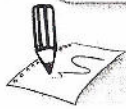
- 4** Completa la tabella per stabilire se i gruppi di quattro numeri possono formare una proporzione. Segui gli esempi.

Numeri	Prodotto dei medi	Prodotto degli estremi	È una proporzione?
4, 3, 8, 6	$3 \times 8 = 24$	$4 \times 6 = 24$	sì
3, 6, 4, 9	$6 \times 4 = 24$	$3 \times 9 = 27$	no
2, 4, 9, 18	$\dots \times \dots = \dots$	$\dots \times \dots = \dots$	
6, 15, 2, 5			
2, 6, 4, 9			
4, 2, 10, 5			
12, 4, 5, 2			



» segue

220



RICERCA DEL TERMINE INCOGNITO

Ancora un problema di cucina! Questa volta Luca cucina per la sua classe le frittelle di riso. La ricetta della nonna indica che per 10 persone sono necessarie 5 uova. In classe ci sono 26 alunni. **Quante uova dovrà usare in tutto?**

Inseriamo i dati in una tabella:

Persone	10	26
Uova	5	x

Il numero di uova che cerchiamo lo indichiamo con x e lo chiamiamo **termine incognito**.

Scriviamo la proporzione composta dai due rapporti.

La proporzione è:

$$10 : 5 = 26 : x$$

x è un estremo

⚠ Attenzione! D'ora in poi il segno di moltiplicazione sarà un puntino per non confonderlo con il termine incognito.

Per calcolare il valore di x: moltiplica i medi e dividi per l'estremo conosciuto.

$$x = \frac{5 \cdot 26}{10} = 13$$

Sono le uova necessarie per 26 bambini.

Puoi fare le riduzioni così...

Se l'incognita è al posto di un medio la procedura è la stessa. Segui l'esempio.

$$12 : 4 = x : 5$$

x è un medio

Per calcolare il valore di x: moltiplica gli estremi e dividi per il medio conosciuto.

$$x = \frac{12 \cdot 5}{4} = \dots\dots$$

Completa tu le riduzioni e scrivi il risultato.



Esercizi

5 Risolvi le proporzioni negli esercizi guidati qui sotto.

• $2 : 50 = x : 75 \longrightarrow x = \frac{2 \cdot 75}{50} \quad x = \dots\dots\dots$

x è un medio: moltiplica gli estremi e dividi per l'altro medio.

Fai tu le riduzioni.

• $x : 40 = 2 : 8 \longrightarrow x = \frac{40 \cdot 2}{8} \quad x = \dots\dots\dots$

x è un estremo: moltiplica i medi e dividi per l'altro estremo.

Fai tu le riduzioni.

6 Risolvi sul tuo quaderno le proporzioni indicate. Prima però completa le frasi con le parole: *medio* o *estremo*.

• $3 : 4 = x : 20 \quad x \text{ è un } \dots\dots\dots$

• $x : 5 = 18 : 3 \quad x \text{ è un } \dots\dots\dots$

• $x : 6 = 21 : 42 \quad x \text{ è un } \dots\dots\dots$

• $8 : 24 = 6 : x \quad x \text{ è un } \dots\dots\dots$

• $50 : x = 4 : 2 \quad x \text{ è un } \dots\dots\dots$

7 Risolvi le proporzioni con termini frazionari negli esercizi guidati qui sotto:

• $\frac{2}{3} : x = \frac{1}{4} : \frac{6}{5} \quad x = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} : \frac{1}{4} \quad x = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{1} = \dots\dots\dots$

x è un medio.

- 1) Moltiplica gli estremi.
- 2) Dividi per l'altro medio.

- 3) Trasforma la divisione in moltiplicazione e fai l'inverso di $\frac{1}{4}$.
- 4) Fai tu le riduzioni... e trova il valore di x .


» segue

$$\bullet \frac{5}{33} : \frac{4}{11} = \frac{5}{6} : x \quad x = \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{6} : \frac{5}{33} \quad x = \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{33}{5} = \dots$$

x è un estremo.

- 1) Moltiplica i medi.
- 2) Dividi per l'altro estremo.

- 3) Trasforma la divisione in moltiplicazione e fai l'inverso di $\frac{5}{33}$.
- 4) Fai tu le riduzioni... e trova il valore di x.

 **8** Risolvi sul tuo quaderno le proporzioni indicate. Prima però completa le frasi con le parole: *medio* o *estremo*.

• $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = x : \frac{1}{2}$ x è un

• $\frac{15}{2} : \frac{14}{9} = \frac{9}{4} : x$ x è un

• $\frac{5}{8} : \frac{3}{14} = x : \frac{3}{5}$ x è un


• $\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{3}{14} : x$ x è un

 **PROPORZIONI CONTINUE**

Guarda ora la proporzione:

$$4 : 8 = 8 : 16$$

I due medi sono uguali: si dice che la proporzione è continua.

 In una proporzione continua i medi sono uguali. Il medio comune che si ripete si chiama **medio proporzionale**.

Considera la proporzione:

$$4 : x = x : 9$$

È una proporzione continua: come si fa a trovare i medi incogniti?

» segue

Se applichiamo la proprietà fondamentale troviamo che:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Prodotto dei medi} & x \cdot x = 4 \cdot 9 & \text{Prodotto degli estremi} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 x^2 & = & 36
 \end{array}$$

Allora: $x = \sqrt{\dots} = \dots$

***** Il medio incognito di una proporzione continua si ottiene estraendo la radice quadrata del prodotto degli estremi.

Esercizi

9 Completa la seguente tabella come nell'esempio.

Proporzione	Proprietà fondamentale	Radice quadrata	Risultato
$4 : x = x : 25$	$x^2 = 4 \cdot 25 = 100$	$x = \sqrt{100}$	$x = 10$
$6 : x = x : 24$			
$27 : x = x : 3$			
$16 : x = x : 4$			
$9 : x = x : 25$			

10 Risolvi le seguenti proporzioni continue con termini frazionari. Segui l'esempio.

Esempio:

$$\frac{5}{2} : x = x : \frac{5}{18} \longrightarrow x^2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{18} = \frac{25}{36} \longrightarrow x = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{8} : x = x : \frac{2}{5} \longrightarrow x^2 = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} = \dots \longrightarrow x = \dots = \dots$$

Continua tu... Attenzione! Riduci le frazioni.

$$\frac{3}{5} : x = x : \frac{12}{5}; \quad \frac{14}{3} : x = x : \frac{21}{32}; \quad \frac{10}{9} : x = x : \frac{5}{18}; \quad \frac{7}{18} : x = x : \frac{1}{14}$$



5 ALTRE PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI

■ Parole chiave: *invertire, comporre, scomporre, permutare, termini, antecedente, conseguente, medio, estremo*

Oltre alla proprietà fondamentale, le proporzioni hanno altre importanti proprietà. Queste proprietà sono utili per risolvere tanti tipi di problemi.



PROPRIETÀ DELL'INVERTIRE

Considera questa coppia di rapporti uguali:

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} \quad \text{e quindi la proporzione: } 4 : 5 = 8 : 10 \text{ (prima proporzione)}$$

- 4, 5, 8 e 10 sono i termini della proporzione;
- 4 e 8 sono gli antecedenti;
- 5 e 10 sono i conseguenti.

Invertiamo i rapporti e scriviamo la proporzione che ne deriva:

$$\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$$

Coppia di rapporti invertiti.

$$5 : 4 = 10 : 8 \text{ (seconda proporzione)}$$

Nuova proporzione.

Completa le seguenti affermazioni usando le parole: *antecedenti* o *conseguenti*.

Rispetto alla prima proporzione:

- nella seconda proporzione 4 e 8 sono diventati
- nella seconda proporzione 5 e 10 sono diventati

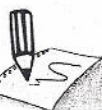
Applicando la proprietà fondamentale possiamo osservare che il prodotto dei medi e degli estremi di entrambe le proporzioni coincide.

Verificalo completando la seguente tabella:

	Proporzioni	Prodotto medi	Prodotto estremi
Prima proporzione	$4 : 5 = 8 : 10$	$5 \cdot \dots = \dots$	$4 \cdot \dots = \dots$
Seconda proporzione	$5 : 4 = 10 : 8$	$\dots \cdot 10 = \dots$	$\dots \cdot 8 = \dots$



Se in una proporzione scambiamo ogni antecedente con il suo conseguente otteniamo una nuova proporzione.



PROPRIETÀ DEL COMPORRE E DELLO SCOMPORRE

Segui le istruzioni indicate nello schema grafico seguente:

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{4 : 5} & = & \textcircled{8 : 10} \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$(4 + 5) : 4 = (8 + 10) : 8 \longrightarrow \dots : 4 = \dots : 8$$

oppure: $(4 + 5) : 5 = (8 + 10) : 10 \longrightarrow \dots : 5 = \dots : 10$

Hai applicato la proprietà del comporre.



In ogni proporzione la somma dei primi due termini sta al primo (o al secondo) termine come la somma degli altri due termini sta al terzo (o al quarto) termine.

» segue

Puoi operare su una proporzione anche con la sottrazione tra i termini.
 Prova a farlo tu sulla seguente proporzione:

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{12 : 8} & = & \textcircled{6 : 4} \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$(12 - \dots) : 12 = (6 - \dots) : \dots \longrightarrow \dots : 12 = \dots : 6$$

oppure: $(12 - \dots) : 8 = (\dots - \dots) : 4 \longrightarrow \dots : 8 = \dots : 4$

Hai applicato la **proprietà dello scomporre**.



In ogni proporzione (con gli antecedenti maggiori dei rispettivi conseguenti) la differenza dei primi due termini sta al primo (o al secondo) termine come la differenza degli altri due termini sta al terzo (o al quarto) termine.



Esercizi

1 Applica la proprietà del comporre alle seguenti proporzioni.

Proporzione	Proprietà	Nuova proporzione
$15 : 9 = 5 : 3$	$(15 + 9) : 15 = (\dots + \dots) : \dots$	$\dots : \dots = \dots : \dots$
$10 : 7 = 20 : 14$		
$6 : 8 = 12 : 16$		
$3 : 15 = 2 : 10$		
$12 : 9 = 4 : 3$		
$2 : 9 = 6 : 27$		
$7 : 6 = 14 : 12$		

2 Applica la proprietà dello scomporre alle seguenti proporzioni.

Proporzione	Proprietà	Nuova proporzione
$7 : 3 = 21 : 9$	$(7 - 3) : 3 = (\dots - \dots) : \dots$	$\dots : \dots = \dots : \dots$
$10 : 7 = 20 : 14$		
$10 : 4 = 20 : 8$		
$15 : 6 = 10 : 4$		
$40 : 12 = 20 : 6$		
$15 : 9 = 30 : 18$		
$5 : 4 = 25 : 20$		

3 Applica la proprietà dello scomporre alla seguente proporzione.

$6 : 8 = 12 : 16$

Si può applicare la proprietà dello scomporre?
 Si può fare $6 - 8$?

Prima di applicare la proprietà dello scomporre devi fare un'altra cosa:

Prova a invertire i rapporti.

$8 : \dots = 16 : \dots$

Hai applicato la proprietà dell'invertire.

Ora puoi applicare la proprietà dello scomporre:

4 Applica la proprietà dello scomporre alle seguenti proporzioni.

- a) $5 : 7 = 15 : 21$
- b) $28 : 7 = 20 : 5$
- c) $14 : 21 = 10 : 15$
- d) $35 : 5 = 42 : 6$

In quali proporzioni devi prima applicare la proprietà dell'invertire?





APPLICAZIONE DELLE PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI

Le proprietà del comporre e dello scomporre ci permettono di risolvere particolari tipi di problemi. Proviamo a risolverne uno.

La somma di due numeri è 42 e il loro rapporto è $\frac{3}{4}$. Trova il valore dei due numeri.

Prima di tutto scriviamo i dati e le richieste.

DATI		RICHIESTE
1° numero = x	2° numero = y	$x = ?$
$x + y = 42$	$x : y = 3 : 4$	$y = ?$

Il dato che si riferisce alla somma si traduce in addizione.

Il rapporto tra le due grandezze si traduce in una proporzione. Le due grandezze da trovare formano il primo rapporto.

Applichiamo la proprietà del comporre alla proporzione:

$$(x + y) : x = (3 + 4) : 3$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 42 & : x = & 7 : 3 \end{array}$$

Mettiamo al posto di $(x + y)$ la somma 42.

⚠ Attenzione! Nel primo rapporto abbiamo scelto x (antecedente) come secondo termine, quindi nel secondo rapporto scegliamo 3 (ancora antecedente).

x è un medio, quindi...

$$x = \frac{42 \cdot 3}{7} = 6 \cdot 3 = 18 \qquad x = 18$$

Per trovare y , dalla somma sottraiamo il valore di x che abbiamo già trovato.

$$y = 42 - 18 = 24 \qquad y = 24$$



Esercizi

5) Applica la proprietà del comporre e determina i valori di x e y .

- $x : y = 5 : 7$ $x + y = 24$
- $x : y = 12 : 13$ $x + y = 50$
- $x : y = 4 : 3$ $x + y = 56$
- $x : y = 6 : 9$ $x + y = 60$

6) Il rapporto tra l'età di Laura e l'età di Paolo è $\frac{6}{5}$ e la somma delle due età è 22 anni. Calcola quanti anni hanno Laura e Paolo. Completa.

DATI

RICHIESTE

$x =$ anni di Laura	$y =$ anni di	Anni di Laura = ?
$x + y =$	$x : y =$:	Anni di Paolo = ?

Risolvi il problema sul tuo quaderno con la proprietà del comporre.

7) In un contenitore di costruzioni ci sono 120 mattoncini rossi e blu.

Il rapporto tra il numero dei mattoncini blu e il numero di quelli rossi è $\frac{5}{7}$.

Quanti sono i mattoncini di ciascun colore?



Risolviamo insieme un problema ancora diverso.

La differenza tra due numeri è 27 e il loro rapporto è $\frac{7}{4}$. Trova il valore dei due numeri.

Hai sicuramente notato che in questo problema al posto della somma dei numeri c'è la differenza.

Anche in questo caso scriviamo i dati e le richieste.

DATI

RICHIESTE

1° numero = x	2° numero = y	$x = ?$
$x - y = 27$	$x : y = 7 : 4$	$y = ?$

La differenza si traduce in una sottrazione.

Con il rapporto impostiamo una proporzione.

» segue

Dato che conosciamo la differenza questa volta applichiamo alla proporzione la proprietà dello scomporre.

Mettiamo al posto di $(x - y)$ la differenza 27.

$$\begin{array}{ccc} (x - y) : x = (7 - 4) : 7 & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ 27 : x = 3 : 7 & & \end{array}$$

! **Attenzione!** Nel primo rapporto abbiamo scelto x (antecedente) come secondo termine, quindi nel secondo rapporto scegliamo 7 (ancora antecedente).

x è un medio,
quindi...

$$x = \frac{27 \cdot 7}{3} = 9 \cdot 7 = 63$$

Da x sottraiamo
il valore della
differenza e troviamo
il valore di y .

$$y = 63 - 27 = 36$$



Esercizi



8 Applica la proprietà dello scomporre e determina i valori di x e y .

- | | |
|---------------------|--------------|
| • $x : y = 12 : 8$ | $x - y = 16$ |
| • $x : y = 25 : 20$ | $x - y = 15$ |
| • $x : y = 36 : 30$ | $x - y = 18$ |
| • $x : y = 27 : 18$ | $x - y = 18$ |
| • $x : y = 16 : 8$ | $x - y = 10$ |
| • $x : y = 5 : 3$ | $x - y = 12$ |

» segue

- 9 Lucia e Anna si sono allenare in palestra facendo dei tiri liberi al canestro. Lucia ha fatto 12 canestri in più di Anna e il rapporto tra il numero di canestri fatti da Lucia e quelli fatti da Anna è $\frac{14}{6}$. Trova il numero di canestri realizzati dalle due ragazze.

Completa i dati:

DATI

x = canestri realizzati da Lucia

y = canestri realizzati da Anna

RICHIESTE

Canestri realizzati da Lucia = ?

Canestri realizzati da Anna = ?

$x - y = \dots\dots\dots$

I canestri fatti in più da Lucia corrispondono alla differenza.

$x : y = \dots\dots\dots : \dots\dots\dots$

Completa la proporzione con il rapporto.

Risolvi il problema sul tuo quaderno con la proprietà dello scomporre.

- 10 Applica la proprietà dello scomporre e determina i valori di x e y .

$x : y = 4 : 16$

$y - x = 24$

Si può fare $4 - 16$?

Si può applicare la proprietà dello scomporre?

Prima devi applicare la proprietà dell'invertire:

$y : \dots\dots = 16 : \dots\dots$

Ora puoi proseguire secondo la solita procedura...

$(y - x) : y = (\dots\dots - \dots\dots) : 16$




$24 : y = \dots\dots : 16$

Hai usato ancora una volta l'antecedente di ogni rapporto.

$y = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

$x = \dots\dots - 24 = \dots\dots$

➤ segue

 **11** Applica le proprietà dell'invertire e dello scomporre e determina i valori di x e y .

• $x : y = 6 : 18$

$y - x = 36$

• $x : y = 4 : 12$

$y - x = 40$

• $x : y = 10 : 15$

$y - x = 35$

• $x : y = 5 : 8$

$y - x = 18$

• $x : y = 3 : 5$

$y - x = 24$



PROPRIETÀ DEL PERMUTARE DEI MEDI O DEGLI ESTREMI

C'è un'ultima proprietà che dobbiamo esaminare insieme. Si chiama proprietà del permutare e con essa possiamo operare sui medi o sugli estremi di una proporzione.

Considera la proporzione:

Se scambiamo di posto i medi, otteniamo questa proporzione.

$12 : 8 = 6 : 4$

$12 : 6 = 8 : 4$ (prima proporzione)

Considera di nuovo la proporzione:

Se scambiamo di posto gli estremi, otteniamo quest'altra proporzione.

$12 : 8 = 6 : 4$

$4 : 8 = 6 : 12$ (seconda proporzione)

Se applichiamo la proprietà fondamentale sia alla prima che alla seconda proporzione possiamo osservare che il prodotto dei medi e degli estremi di entrambe coincide ed è 48.



Se in una proporzione si scambiano di posto i medi oppure gli estremi, si ottiene ancora una proporzione.

» segue



Esercizi

- 12** Applica le proprietà del permutare e del comporre e determina i valori di x e y .

$$x : 5 = y : 4 \qquad x + y = 27$$

$$x : y = \dots : \dots$$

Applica la proprietà del permutare ai medi.

$$(x + y) : x = (\dots + \dots) : \dots$$

Applica la proprietà del comporre.

.....

Continua tu.

$$x = \dots$$

$$y = \dots$$

- 13** Applica le proprietà del permutare e dello scomporre e determina i valori di x e y .

$$10 : y = 12 : x \qquad x - y = 20$$

$$\dots : y = 12 : \dots$$

Applica la proprietà del permutare agli estremi.

$$(x - y) : x = (\dots - \dots) : \dots$$

Applica la proprietà dello scomporre.

.....

Continua tu.

$$x = \dots$$

$$y = \dots$$

